E.N.S.I. DE PHYSIQUE & DE MECANIQUE 1983

Op. M & P **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES** (2h30)

DÉFINITIONS.

Si g est une fonction de variable réelle à valeurs réelles, de domaine de définition D et si x_0 est un nombre réel, on appellera « suite des approximations successives engendrée par g à partir de x_0 », la suite $(x_n)_{n \in N}$ définie par la donnée de x_0 et la relation :

$$x_{n+1} = \begin{cases} g(x_n) & \text{si } x_n \in D \\ \infty & \text{si non} \end{cases}$$

Si f est une fonction définie sur R à valeurs réelles, deux fois continûment dérivable, si $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et si x_0 est un nombre réel, on appelle « suite de Newton engendrée par f à partir de x_0 » la suite des approximations successives engendrée par g à partir de x_0.

Le théorème suivant sera admis.

Soit g une fonction continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de l'axe réel, à valeurs réelles. Soit $\bar{x}$ un point de I tel que :

$$g(\bar{x}) = \bar{x} \quad \text{et} \quad |g'(\bar{x})| < 1$$

Alors il existe un voisinage V $(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tel que la suite des approximations successives engendrée par g à partir d'un nombre x_0 de V $(\bar{x})$ est une suite réelle convergente, de limite $\bar{x}$.

PARTIE I

Dans cette partie, f est une fonction définie sur R, à valeurs réelles, deux fois continûment dérivable sur R.

On pose :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

QUESTION 1.

Soit $\bar{x}$ un nombre réel tel que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrez que $g(\bar{x}) = \bar{x}$ si et seulement si $f(\bar{x}) = 0$.

QUESTION 2.

Montrez que, si la suite de Newton engendrée par f à partir de x_0 est une suite réelle convergente de limite $\bar{x}$ telle que, pour tout entier n, on ait $f'(x_n) \neq 0$, alors $f(\bar{x}) = 0$.

QUESTION 3.

Soit $\bar{x}$ un nombre réel tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrez que si x_0 est à une distance suffisamment petite de $\bar{x}$, la suite de Newton engendrée par f à partir de x_0 est une suite réelle qui converge vers $\bar{x}$.

PARTIE II

Dans cette partie :

$$f(x) = x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On notera $(x_n)_{n \in N}$ la suite de Newton engendrée par f à partir d'un nombre réel x_0.

QUESTION 4.

En traçant la représentation graphique de f, interprétez géométriquement la construction de x_1, x_2 et x_3 pour $x_0 = 0$.

En prenant une valeur numérique approchée à 10^{-4} près de $\sqrt{2}$, précisez les valeurs numériques de x_1, x_2, x_3 en expliquant les opérations, méthodes et matériels de calcul utilisés.

.../...

QUESTION 5.

Étudiez la suite $(x_n)_{n \in N}$ pour $x_0 = -1$.

QUESTION 6.

Tracez la représentation graphique de g.

QUESTION 7.

Montrez que l'équation : $(g \circ g)(y) = y$ admet au moins deux solutions dans l'intervalle $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

Donnez la valeur de $y_0 = \text{Min}\left\{ y \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[, (g \circ g)(y) = y \right\}$.

QUESTION 8.

Montrez que la suite des approximations successives engendrée par $g \circ g$ en partant d'un point z, à distance suffisamment petite de y_0, est une suite réelle convergente dont on précisera la limite.

QUESTION 9.

Étudiez le comportement de la suite de Newton engendrée par f en partant de $x_0 = z$.

PARTIE III

PARTIE III

Dans cette partie :

$f(x) = x^2 - 2$

pour tout nombre réel a, on pose :

- $g_a(x) = x - af(x)$
- $(x_n^a)_{n \in N}$ est la suite des approximations successives engendrée par g_a en partant de $x_0^a = 2$.

QUESTION 10.

En traçant la représentation graphique de f, interprétrez géométriquement la construction de x_1^a et x_2^a pour une valeur de a choisie par le candidat.

QUESTION 11.

Indiquez des intervalles $]-\infty, \lambda[$ et $]\mu, +\infty[$ tels que, si a appartient à l'un de ces intervalles, la suite $(x_n^a)_{n \in N}$ est divergente.

Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles on a : $x_n^a = x_1^a$ pour tout $n \geqslant 1$?

QUESTION 12.

Montrer que, pour tout $a \in]0, \frac{\sqrt{2}}{4}[$, la suite des approximations successives engendrée par g_a à partir d'un point de l'intervalle $\left]0, \sqrt{2}\right[$ converge vers $\sqrt{2}$. En déduire que $(x_n^a)_{n \in N}$ converge pour tout a dans $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right[$.

FIN